

PG1 - cours mécanique - exemple forces
généralisées.

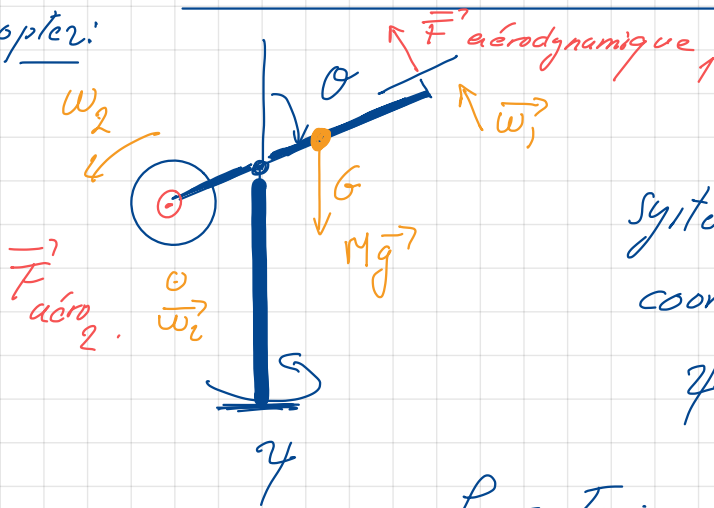
9/12/2020

Ph. Tiilhaupt



Modélisation à l'aide du formalisme de Lagrange avec forces non conservatives

Toycopter:



système à 2 d° de liberté
coordonnées généralisées:

φ et θ .

$$L = E_{cin} - E_{pot}$$

Lagrange:

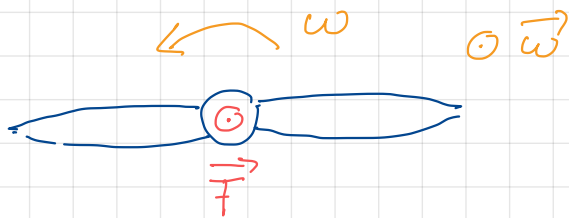
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = F_{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_{\theta}$$

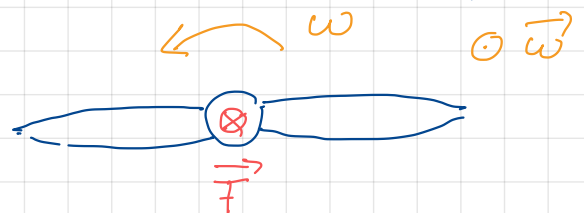
La question est de déterminer F_{φ} et F_{θ} , les deux forces généralisées.

- Méthode: 1° déplacer une coordonnée après l'autre en gardant les autres coordonnées fixes
 - 2° calculer le travail effectué par les forces non conservatives δW
 - 3° Factoriser δq_i de δW afin de faire apparaître F_{q_i}
- $$\delta W = F_{q_i} \delta q_i$$

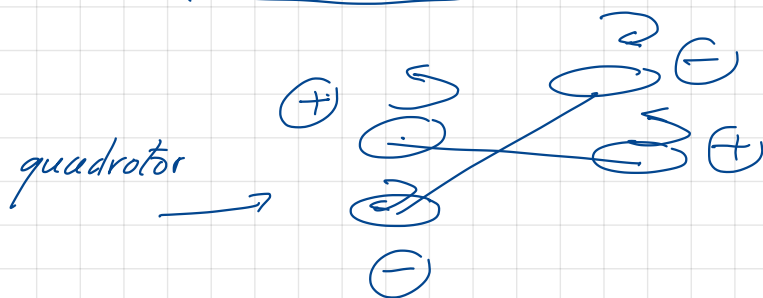
Modèle de force pour les hélices de drones (magnettes)



hélices $\oplus$



hélices $\ominus$



$\vec{R}_{\text{aérodynamique}}$

$$\vec{L} = 0$$

modèle de force

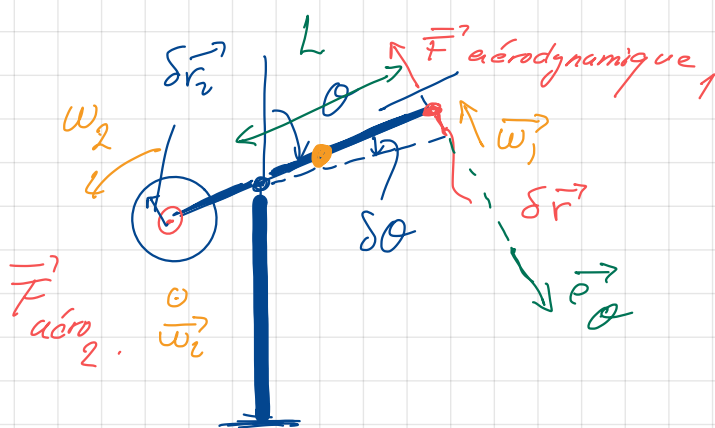
$$\vec{F}_{\text{aéro}} = \pm C \vec{\omega} \|\vec{\omega}\|$$

$+$
hélice $\oplus$

$-$
hélice $\ominus$
constante aérodynamique

Forces généralisées F_ψ, F_θ

F_θ : 1° considérer un $\delta\theta$
et constant.



$$\delta \vec{r}_1 = L \delta \theta \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F}_{\text{aéro}1} \cdot \delta \vec{r}_1 \\ &+ \vec{F}_{\text{aéro}2} \cdot \delta \vec{r}_2 \\ &= 0 \text{ car } \delta \vec{r}_2 \perp \vec{F}_{\text{aéro}2} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{\text{aéro}1} = + C_1 \vec{\omega}_1 \|\vec{\omega}_1\|$$

$$\vec{\omega}_1 = -\omega_1 \vec{e}_\theta \quad = -C_1 \omega_1 \vec{e}_\theta |\omega_1|$$

les deux hélices sont supposées $\oplus$.

2° $\delta W = -C_1 \omega_1 \vec{e}_\theta \cdot \vec{\omega}_1 \cdot \underbrace{(|\omega_1| \cdot L \delta\theta \cdot \vec{e}_\theta)}_{\delta \vec{r}_1}$

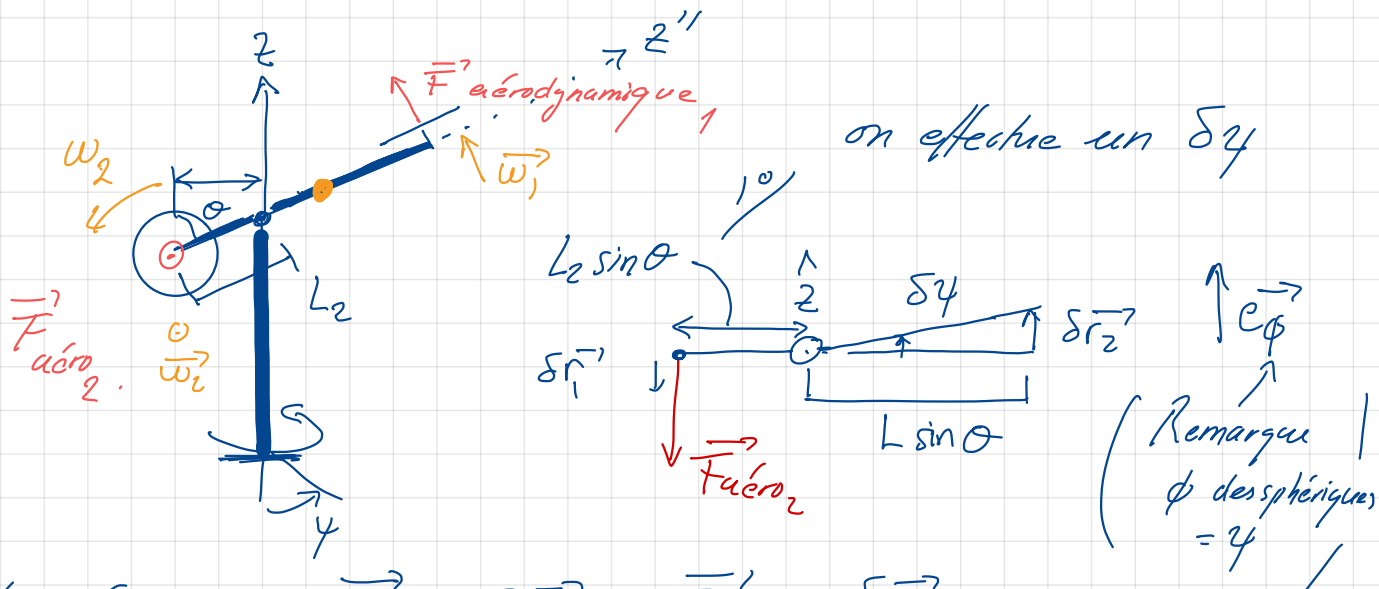
↑
produit scalaire

$= -L C_1 \omega_1 / |\omega_1| \delta\theta$

3° factoriser $\delta\theta$ $\delta W = -L C_1 \omega_1 / |\omega_1| \delta\theta$

$\Rightarrow \boxed{F_\theta = -L C_1 \omega_1 / |\omega_1|}$

Force généralisée selon φ $F_\varphi = ?$



2° $\delta W = \underbrace{\vec{F}_{aéro_1} \cdot \delta \vec{r}_1}_{=0 \text{ car } \delta \vec{r}_1 \perp \vec{F}_{aéro_1}} + \vec{F}'_{aéro_2} \cdot \delta \vec{r}_2$

$\delta \vec{r}_2 = -L_2 \sin\theta \delta\varphi \vec{e}_\phi$

$\delta \vec{r}_1 = L \sin\theta \delta\varphi \vec{e}_\phi$

$\vec{F}'_{aéro_2} = +C_2 \vec{\omega}_2 \|\vec{\omega}_2\| = -C_2 \omega_2 \vec{e}_\phi |\omega_2|$

↑
hélice (+)

$\vec{\omega}_2 = -\vec{e}_\phi \cdot \omega_2$

$$\delta W = \vec{F}_{\text{acro}_2} \cdot \delta \vec{r}_2 = -c_2 \omega_2 \vec{e}_\phi |w_2| \cdot$$

$$\delta \vec{r}_2 = -L_2 \sin \theta \delta \varphi \vec{e}_\phi$$

$$\delta W = + c_2 \omega_2 \sin \theta |w_2| \delta \varphi$$

30/ factoriser δW :

$$\delta W = F_\varphi \delta \varphi$$

$$F_\varphi = + c_2 L_2 \omega_2 \sin(\theta) |w_2|$$